Courbes et surfaces

TD n° 9 : Seconde forme fondamentale, courbures

Exercice 1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $X : U \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto X(u, v)$ une carte C^∞ de la surface Σ. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert et non vide. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto X(u(t), v(t))$ une courbe C^∞ et birégulière de la surface Σ vérifiant : $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ pour tout t dans I, $\dot\gamma$ désignant la dérivée de γ.
On utilisera dans cet exercice les notations $\dot f$, $\ddot f$, pour désigner la dérivée, la dérivée seconde, d'une fonction f par rapport à sa variable réelle t.
On note :

- $\mathbf{I}$ la première et $\mathbf{II}$ la seconde forme fondamentale de Σ ;
- $\mathcal{F}_{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{II}} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ les matrices respectives, dans la base $(\partial_u X, \partial_v X)$, de la première et de la deuxième forme fondamentale de Σ dans la paramétrisation X ;
- $T_P\Sigma$ l'espace vectoriel tangent à Σ en $P \in \Sigma$;
- $\mathbf{N}$ le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\partial_u X \wedge \partial_v X$ normal à Σ dans la paramétrisation X ;
- $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ le repère de Frenet de γ ;
- κ la courbure de γ.

1. Montrer que, pour tout t dans I, $(\mathbf{t}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{N}(u(t), v(t)))$, où $\mathbf{g} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}$, est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Cette base est le repère de Darboux-Ribeaucour, et $\mathbf{g}$ est le vecteur normal géodésique.
2. Montrer qu'il existe des applications C^∞ κ_n et κ_g de I vers $\mathbb{R}$, telles que : $\ddot\gamma = \dot{\mathbf{t}} = \kappa_g \mathbf{g} + \kappa_n \mathbf{N}$.
   κ_n est la courbure normale de γ et κ_g sa courbure géodésique.
3. Montrer que $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$.
4. On note φ une application C^∞ qui à tout t dans I associe une mesure en radians de l'angle entre $\mathbf{n}(t)$ et $\mathbf{N}(u(t), v(t))$.
   Montrer que $\kappa_n = \kappa \cos\varphi$.
5. Montrer que $\kappa_n = \mathbf{II}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = L\dot u^2 + 2M\dot u\dot v + N\dot v^2$. En déduire que la courbure normale de γ au point P de Σ ne dépend que de son vecteur unitaire tangent en P.
6. On suppose que γ est une paramétrisation de l'intersection du plan Π avec Σ. Soit t_0 dans I et soit $X(u(t_0), v(t_0)) = P \in \Pi \cap \Sigma$. On note ψ l'angle entre Π et $T_P\Sigma$.
   Montrer que $|\kappa_n(t_0)| = \kappa(t_0)\sin\psi$. En déduire que $\kappa(t_0)\sin\psi$ dépend de $\mathbf{t}(t_0)$, mais pas de ψ.
   (Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Meusnier).
7. Soit r un nombre réel strictement positif.
   On suppose pour cette question que $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ et que γ est une paramétrisation d'un arc de cercle de rayon R tracé sur la sphère Σ.
   (a) Montrer que $\kappa_n = \pm\dfrac{1}{r}$.
   (b) Déterminer κ_g.
8. Comme $\mathbf{g}$ est de norme constante, on sait que $\dot{\mathbf{g}}$ est orthogonal à $\mathbf{g}$. $\dot{\mathbf{g}}$ est donc combinaison linéaire de $\mathbf{t}$ et $\mathbf{N}$.
   (a) De $\dot{\mathbf{t}} = \kappa_g\mathbf{g} + \kappa_n\mathbf{N}$, déduire que $\dot{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{t} = -\kappa_g$.
   (b) On pose $\dot{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{N} = \tau_g$; τ_g est la torsion géodésique.
   Montrer que l'on obtient alors les formules de Darboux :

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} \dot{\mathbf{t}} & = & \kappa_g\mathbf{g} & + & \kappa_n\mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{g}} & = & -\ \kappa_g\mathbf{t} & + & \tau_g\mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} & = & -\ \kappa_n\mathbf{t} & - & \tau_g\mathbf{g} \end{array}\right.$$

9. $\mathcal{W}_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$, $\lambda\partial_u X(u,\, v) + \mu\partial_v X(u,\, v) \mapsto -\lambda\partial_u \mathbf{N}(u,\, v) - \mu\partial_v \mathbf{N}(u,\, v)$ est l'endomorphisme de WEINGARTEN de Σ en $P = X(u,\, v)$ dans la carte X. On rappelle que les courbures principales σ_1 et σ_2 de Σ en P, dans la carte X, sont les valeurs propres de $\mathcal{W}_P$ car $\mathbf{II}(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \mathbf{I}(\mathbf{x},\, \mathcal{W}_P(\mathbf{y})) = \mathbf{I}(\mathcal{W}_P(\mathbf{x}),\, \mathbf{y})$.

   Notons e_1 et à e_2 des vecteurs propres de $\mathcal{W}_P$ associés respectivement à σ_1 et à σ_2. On suppose $\sigma_1 \leq \sigma_2$ et on choisit e_1 et e_2 de telle sorte que $(e_1,\, e_2)$ soit une base orthonormée de $T_P\Sigma$. Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \mathbf{t} & = & e_1 \cos\theta & + & e_2 \sin\theta \\ \mathbf{g} & = & -e_1 \sin\theta & + & e_2 \cos\theta \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que $\kappa_n = \mathcal{W}_P(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}$ et $\tau_g = \mathcal{W}_P(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{g}$.

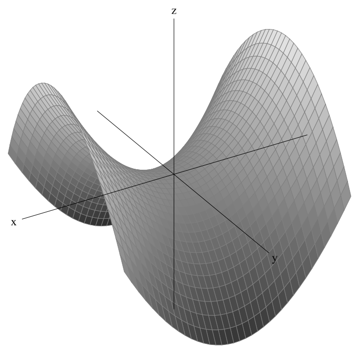
   (b) Montrer que $\kappa_n = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta$.
   En déduire que σ_1 et σ_2 sont respectivement la plus petite et la plus grande des courbures normales en P pour une courbe birégulière C^∞ tracée sur Σ et passant par P.

   (c) Montrer que $\tau_g = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos\theta \sin\theta$.
   En déduire que toute courbe birégulière C^∞ tracée sur Σ et passant par P a en ce point une torsion géodésique nulle, si et seulement si, sa tangente en P est dirigée par une direction principale.

Exercice 2

On considère le paraboloïde hyperbolique Σ, d'équation $x^2 - y^2 = z$.

Paraboloïde hyperbolique



1. On pose $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$. En déduire une paramétrisation X de Σ.
   Vérifier que X est un plongement.
2. Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de Σ dans la paramétrisation X.
3. Expliciter le vecteur unitaire normal $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \partial_u X \wedge \partial_v X$.
4. Déterminer les coefficients L, M et N de la seconde forme fondamentale de Σ dans la paramétrisation X.
5. Déterminer la courbure moyenne et la courbure de GAUSS de Σ.
6. Déterminer les courbures principales de Σ aux points de courbure moyenne nulle.
7. Déterminer les directions principales de Σ au point $P = X(0,\, 0)$.

Exercice 3

Considérons une surface X, plongement C^∞, et une courbe paramétrée C^∞ et régulière : γ, tracée sur X. On pose : $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto X \circ \phi(t)$, avec $\phi(t) = (u(t),\, v(t))$. Soit $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \partial_u X \wedge \partial_v X$, le vecteur unitaire normal à l'espace tangent. On dit que γ est une ligne de courbure de X lorsque pour tout $t \in I$, la direction de $\gamma'(t)$ est une direction principale de X.

1. Montrer que γ est une ligne de courbure si et seulement si $(\mathbf{N} \circ \phi)' = -\sigma\gamma'$, σ étant une courbure principale de X (formule de Rodrigues).
2. Montrer que γ est une ligne de courbure si et seulement si la torsion géodésique τ_g de γ est identiquement nulle.
3. On note E, F et G les coefficients de la première forme fondamentale de X et L, M et N les coefficients de la seconde forme fondamentale de X.
   Montrer que γ est une ligne de courbure si et seulement si les fonctions u et v définissant ϕ vérifient l'équation différentielle $(EM - FL)\mathrm{d}u^2 + (EN - GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (FN - GM)\mathrm{d}v^2 = 0$.